PART2　有理数の指数

例題

(1)　次の値を求めよ。

(i)　$25^{\frac{3}{2}}$　　(ii)　$16^{-\frac{3}{4}}$

(2)　次の計算をせよ。

(i)　$\sqrt[3]{3}\times\sqrt{27}\div\sqrt[6]{243}$　　(ii)　$\sqrt[4]{6}\div\sqrt{6}\times\sqrt[4]{12}$

Point Pickup

練習

(1)　次の値を求めよ。

(i)　$125^{\frac{2}{3}}$　　(ii)　$81^{-\frac{5}{4}}$

(2)　次の計算をせよ。

(i)　$\sqrt[3]{\sqrt{64}} \div \sqrt{16} \times \sqrt[3]{8}$　　(ii)　$\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6}$

第11講　PART2 確認問題

次の値を求めよ。

1　$27^{\frac{2}{3}} = \boxed{\text{ア}}$

2　$8^{-\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{\boxed{\text{イウ}}}$

次の計算をせよ。

3　$\sqrt[3]{\sqrt{256}} \div \sqrt{64} \times \sqrt[3]{32} = \boxed{\text{エ}}$

4　$\sqrt{48} \times \sqrt[6]{12} \div \sqrt[3]{6} = \boxed{\text{オ}}\sqrt[\boxed{\text{カ}}]{\boxed{\text{キ}}}$

PART2　有理数の指数

例題

(1)　次の値を求めよ。

(i)　$25^{\frac{3}{2}}$　　(ii)　$16^{-\frac{3}{4}}$

(2)　次の計算をせよ。

(i)　$\sqrt[3]{3}\times\sqrt{27}\div\sqrt[6]{243}$　　(ii)　$\sqrt[4]{6}\div\sqrt{6}\times\sqrt[4]{12}$

(1) (i)　$25^{\frac{3}{2}}=\sqrt{25^3}=(\sqrt{25})^3=(\sqrt{5^2})^3=5^3=125$

(ii)　$16^{-\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{16^{\frac{3}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{16^3}}=\dfrac{1}{(\sqrt[4]{2^4})^3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$

（別解）

(i)　$25^{\frac{3}{2}}=(5^2)^{\frac{3}{2}}=5^{2\times\frac{3}{2}}=5^3=125$

(ii)　$16^{-\frac{3}{4}}=(2^4)^{-\frac{3}{4}}=2^{4\times\left(-\frac{3}{4}\right)}=2^{-3}=\dfrac{1}{8}$

(2) (i)　$\sqrt[3]{3}\times\sqrt{27}\div\sqrt[6]{243}=3^{\frac{1}{3}}\times(3^3)^{\frac{1}{2}}\div(3^5)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{3}{2}}\div3^{\frac{5}{6}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{6}}=3^1=3$

(ii)　$\sqrt[4]{6}\div\sqrt{6}\times\sqrt[4]{12}=(2\times3)^{\frac{1}{4}}\div(2\times3)^{\frac{1}{2}}\times(2^2\times3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{4}}\div\left(2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}\right)\times2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}}$

$$=2^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}}\times3^0=\sqrt[4]{2}\times1=\sqrt[4]{2}$$

練習

(1)　次の値を求めよ。

(i)　$125^{\frac{2}{3}}$　　(ii)　$81^{-\frac{5}{4}}$

(2)　次の計算をせよ。

(i)　$\sqrt[3]{\sqrt{64}}\div\sqrt{16}\times\sqrt[3]{8}$　　(ii)　$\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}$

(1) (i)　$125^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{125^2}=(\sqrt[3]{125})^2=(\sqrt[3]{5^3})^2=5^2=25$

(ii)　$81^{-\frac{5}{4}}=\dfrac{1}{81^{\frac{5}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{81^5}}=\dfrac{1}{(\sqrt[4]{3^4})^5}=\dfrac{1}{3^5}=\dfrac{1}{243}$

（別解）

(i)　$125^{\frac{2}{3}}=(5^3)^{\frac{2}{3}}=5^{3\times\frac{2}{3}}=5^2=25$　　(ii)　$81^{-\frac{5}{4}}=(3^4)^{-\frac{5}{4}}=3^{4\times\left(-\frac{5}{4}\right)}=3^{-5}=\dfrac{1}{243}$

(2) (i)　$\sqrt[3]{\sqrt{64}}\div\sqrt{16}\times\sqrt[3]{8}=\left\{(2^6)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}\div(2^4)^{\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{3}}=2^1\div2^2\times2^1=2^{1-2+1}=2^0=1$

(ii)　$\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}=(2\times3)^{\frac{1}{2}}\times(2\times3^3)^{\frac{1}{4}}\div(2\times3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{3}{4}}\div\left(2^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{4}}\right)$

$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\times3^1=3\sqrt{2}$$

第11講 PART2 確認問題 解答

1 [正解] ア：9

[解説]

$$27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=(\sqrt[3]{27})^2=(\sqrt[3]{3^3})^2=3^2=\mathbf{9}$$ [A]

[A] $a>0$ で，m，n が正の整数のとき
$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

(別解)

$$27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^{3\times\frac{2}{3}}=3^2=\mathbf{9}$$

2 [正解] イウ：32

[解説]

$$8^{-\frac{5}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{5}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^5}}=\frac{1}{(\sqrt[3]{2^3})^5}=\frac{1}{2^5}=\mathbf{\frac{1}{32}}$$ [B]

[B] $a>0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき
$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$
特に $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，$a^{-r}=\frac{1}{a^r}$

(別解)

$$8^{-\frac{5}{3}}=(2^3)^{-\frac{5}{3}}=2^{3\times\left(-\frac{5}{3}\right)}=2^{-5}=\mathbf{\frac{1}{32}}$$

3 [正解] エ：1

[解説]

$$\sqrt[3]{\sqrt{256}}\div\sqrt{64}\times\sqrt[3]{32}$$

$$=\left\{(2^8)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}\div(2^6)^{\frac{1}{2}}\times(2^5)^{\frac{1}{3}}$$ [C]

$$=2^{\frac{8}{2\cdot3}}\div2^{\frac{6}{2}}\times2^{\frac{5}{3}}$$ [D]

$$=2^{\frac{4}{3}}\div2^3\times2^{\frac{5}{3}}$$

$$=2^{\frac{4}{3}-3+\frac{5}{3}}=2^0=\mathbf{1}$$

[C] $a>0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき
$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$
特に $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，$a^{-r}=\frac{1}{a^r}$

[D] $a>0$，$b>0$ で，r，s が有理数のとき
$$a^ra^s=a^{r+s},\quad a^r\div a^s=\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$$
$$(a^r)^s=a^{rs},\quad (ab)^r=a^rb^r,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$$

4 [正解] オ：4，カ：3，キ：3

[解説]

$$\sqrt{48}\times\sqrt[6]{12}\div\sqrt[3]{6}$$
$$=(2^4\times3)^{\frac{1}{2}}\times(2^2\times3)^{\frac{1}{6}}\div(2\times3)^{\frac{1}{3}}$$ [E]
$$=2^{\frac{4}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{2}{6}}\times3^{\frac{1}{6}}\div\left(2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}\right)$$ [F]
$$=2^{2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}$$
$$=2^2\times3^{\frac{1}{3}}=\mathbf{4}\sqrt[3]{\mathbf{3}}$$

[E]　$a>0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

特に　$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

[F]　$a>0$，$b>0$ で，r，s が有理数のとき

$$a^r a^s=a^{r+s},\quad a^r\div a^s=\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$$
$$(a^r)^s=a^{rs},\quad (ab)^r=a^r b^r,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$$